ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XXIX, zeszyt 1 — 1981

LUDWIK BORKOWSKI

CHARAKTERYSTYKA KWANTYFIKATORÓW W AKSJOMATYCZNEJ TEORII KONSEKWENCJI

Wśród aksjomatów teorii konsekwencji można odróżnić dwa rodzaje: 1. aksjomaty dotyczące mocy zbioru S i ogólnych własności konsekwencji, 2. aksjomaty charakteryzujące funktory rachunku zdań.

Nie formułowano w niej aksjomatów charakteryzujących kwantyfikatory. Zapewne, istnieje takie specjalne ujęcie aksjomatyczne rachunku predykatów, przy którym nie ma żadnych swoistych reguł pierwotnych dla kwantyfikatorów, a jako jedyna reguła pierwotna wystarcza reguła odrywania. Jednakże przy zwykłych ujęciach tego systemu występuje przynajmniej jedna reguła pierwotna dotycząca kwantyfikatorów, np. reguła dołączania kwantyfikatora ogólnego do tez. W aksjomatycznej teorii konsekwencji odpowiadającej takiemu ujęciu nie wystarcza wyszczególnienie wyrażeń należących do zbioru tez logicznych, ale trzeba wprowadzić aksjomaty stwierdzające dla wyrażeń zawierających kwantyfikatory, że wyrażenia o pewnej postaci są konsekwencjami wyrażeń o określonej postaci lub też, że jeśli pewne wyrażenia są tezami logicznymi, to określone inne wyrażenia są tezami logicznymi.

W artykule tym wskazuję, jak aksjomatyczną teorię konsekwencji można rozszerzyć przez dołączenie aksjomatów charakteryzujących kwantyfikatory.

Znane są różne równoważne aksjomatyki teorii konsekwencji, aksjomatyka o terminach pierwotnych „S" i „L" oraz aksjomatyka o terminach pierwotnych „S" i „Cn".

Równoważna z aksjomatyką Tarskiego o terminach pierwotnych „S" i „Cn" jest aksjomatyka nawiązująca do pewnego układu reguł założeniowych. Występujące w niej aksjomaty charakteryzujące funktory rachunku zdań stanowią trawestację reguł systemu założeniowego dotyczących tych funktorów (reguły tworzenia dowodów założeniowych i reguł dołączania nowych wierszy do dowodu) [1]. Jest to zrozumiałe, gdyż reguły

[1] W wykonanych pod moim kierunkiem na Uniwersytecie Wrocławskim pracach magisterskich: M. Szatan. *Aksjomatyczna teoria systemów dedukcyjnych opartych na intuicjonistycznym rachunku zdań.* 1966; Z. Szatan. *Aksjomatyczna teoria systemów dedukcyjnych opartych na pozytywnym i implikacyjnym rachun-*

pierwotne systemu założeniowego można traktować jako reguły określające pojęcie konsekwencji.

Podobnie jak dla funktorów rachunku zdań można w aksjomatycznej teorii konsekwencji wprowadzić aksjomaty charakteryzujące kwantyfikatory stanowiące trawestację reguł pierwotnych dla kwantyfikatorów w systemie założeniowym, mianowicie reguł opuszczania i dołączania kwantyfikatorów.

Oprócz pojęcia wyrażenia sensownego (zdaniowego) wprowadzamy jeszcze pojęcie zmiennej wolnej w wyrażeniu sensownym oraz wyrażenia zdaniowego uzyskanego przez prawidłowe podstawienie wyrażenia ξ za zmienną α w wyrażeniu φ, które będzie oznaczane przez $\varphi(\alpha/\xi)$.

Jako aksjomaty charakteryzujące kwantyfikator ogólny przyjmujemy:

$\forall 1$ $\varphi(\alpha/\xi) \in Cn(\{\underset{\alpha}{\forall}\varphi\})$

$\forall 2$ $\varphi \in CnX \wedge \alpha$ nie jest wolne w $X \rightarrow \ulcorner\underset{\alpha}{\forall}\varphi\urcorner \in CnX$

Na podstawie tych aksjomatów oraz tez teorii konsekwencji można udowodnić m. i. następujące twierdzenia:

T1 $\varphi \in Cn\emptyset \rightarrow \ulcorner\underset{\alpha}{\forall}\varphi\urcorner \in Cn\emptyset$

Jeśli φ jest tezą logiczną, to $\ulcorner\underset{\alpha}{\forall}\varphi\urcorner$ jest tezą logiczną.

T2 $\ulcorner\underset{\alpha}{\forall}\varphi \rightarrow \varphi(\alpha/\xi)\urcorner \in Cn\emptyset$

T3 Jeśli α nie jest wolne w φ, to $\ulcorner\underset{\alpha}{\forall}(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \underset{\alpha}{\forall}\psi)\urcorner \in Cn\ \emptyset$

Dow.[2]

1	α nie jest wolne w φ	z.
2	$\ulcorner\varphi \rightarrow \psi\urcorner \in Cn(\{\underset{\alpha}{\forall}(\varphi \rightarrow \psi)\})$	$\forall 1$
3	$\psi \in Cn(\{\varphi, \underset{\alpha}{\forall}(\varphi \rightarrow \psi)\})$	2
4	α nie jest wolne w $\{\varphi, \underset{\alpha}{\forall}(\varphi \rightarrow \psi)\}$	1
5	$\ulcorner\underset{\alpha}{\forall}\psi\urcorner \in Cn\ (\{\varphi, \underset{\alpha}{\forall}(\varphi \rightarrow \psi)\})$	$\forall 2$, 3, 4
6	$\ulcorner\varphi \rightarrow \underset{\alpha}{\forall}\psi\urcorner \in Cn(\{\underset{\alpha}{\forall}(\varphi \rightarrow \psi)\})$	5
	$\ulcorner\underset{\alpha}{\forall}(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \underset{\alpha}{\forall}\psi)\urcorner \in Cn\ \emptyset$	6

ku zdań. 1966 — zostały podane m. in. szczegółowe dowody równoważności zwykłej aksjomatyki teorii konsekwencji o terminie pierwotnym „Cn" z aksjomatyką stanowiącą trawestację reguł systemu założeniowego dla teorii konsekwencji wyznaczonej przez intuicjonistyczny rachunek zdań i przez pozytywny rachunek zdań. Por. też: S. Surma. *Uproszczona aksjomatyka teorii konsekwencji Tarskiego.* „Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Opolu. Matematyka" 6 : 1969 s. 77 - 84.

[2] Nie zaznaczam stosowania w tym dowodzie dobrze znanych tez teorii konsekwencji.

T2 i T3 odpowiadają dwom aksjomatom rachunku predykatów, a T1 regule pierwotnej dołączania kwantyfikatora ogólnego do tez.

Kwantyfikator szczegółowy można scharakteryzować za pomocą definicji lub za pomocą dwóch następujących aksjomatów odpowiadających regułom jego dołączania i opuszczania[3]:

∃1 $\ulcorner \underset{\alpha}{\exists}\varphi \urcorner \in \mathrm{Cn}\,(\{\varphi(\alpha/\xi)\})$

∃2 $\psi \in \mathrm{Cn}(X \cup \{\varphi\}) \wedge \alpha$ nie jest wolne w $X \cup \{\varphi\} \rightarrow \psi \in \mathrm{Cn}\,(X \cup \{\underset{\alpha}{\exists}\varphi\})$

Mówiąc dotychczas o aksjomatach teorii konsekwencji mieliśmy na myśli teorię konsekwencji wyznaczonej przez klasyczny rachunek zdań. Łatwo jednak zauważyć, że aksjomaty ∀1, ∀2 oraz ∃1, ∃2 można dołączyć również do aksjomatów teorii konsekwencji wyznaczonej przez nieklasyczne rachunki zdań. Zwykle bowiem różne nieklasyczne rachunki logiczne otrzymuje się z odpowiednich nieklasycznych rachunków zdań przez dołączenie tego samego układu aksjomatów i reguł pierwotnych dotyczących kwantyfikatorów.

---

[3] Mamy tu na myśli gentzenowską regułę opuszczania kwantyfikatora szczegółowego (por. np. E. Nieznański. *Definicje i dowód indukcyjny a relacje ancestralne*. „Studia Philosophiae Christianae" 2 : 1973 s. 103 - 121).